

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

*Заведующий кафедрой
теории функций и геометрии*



Семёнов Е.М.

подпись, расшифровка подписи

11.04.2022 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.17 Современный гармонический анализ и его приложения

1. Код и наименование направления подготовки/специальности:

01.04.01м Математика

2. Профиль подготовки/специализация: Математические модели гидродинамики

3. Квалификация (степень) выпускника: Магистр

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:

0503 теории функций и геометрии

6. Составители программы: Семенов Евгений Михайлович, д. ф.-м. н., профессор

7. Рекомендована: Научно-методическим Советом математического факультета,
протокол №0500-03 от 24.03.2022 г.

8. Учебный год: 2023/2024 уч.год

Семестр(ы): 4

9. Цели и задачи учебной дисциплины: Целями освоения дисциплины «Современный гармонический анализ и его приложения» является развитие и закрепление аналитических навыков работы студентов с функциями и пространствами, овладение аппаратом функционального анализа. Основное внимание уделяется таким важным в анализе системам функций, как система Радемахера и система Хаара.

Задачи дисциплины:

- демонстрация на примерах математических понятий и методов сущности научного подхода, специфики математики, ее роли в развитии других наук;
- овладение студентами основными математическими понятиями гармонического и функционального анализа;
- выработка умений анализировать полученные результаты, решать типовые задачи, приобретение навыков работы со специальной математической литературой;
- формирование умений использовать математический аппарат для решения теоретических и прикладных задач.

10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП: Дисциплина «Современный гармонический анализ и его приложения» относится к учебным дисциплинам обязательной части блока Б1 основной образовательной программы направления подготовки 01.04.01м Математика - Магистр.

Курс «Современный гармонический анализ и его приложения» опирается на курсы: «Математический анализ», «Функциональный анализ». Он указывает на глубокие связи этих дисциплин с другими разделами математики («Алгебра», «Теория вероятностей»).

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен формулировать и решать актуальные и значимые проблемы математики	ОПК-1.1	Обладает обширным диапазоном знаний, полученным в области математических и(или) естественных наук	Знать: основные стандарты, нормы и правила оформления результатов научно-исследовательских работ. Уметь: оформлять результаты научно-исследовательских работ. Владеть: навыками гармонического анализа и применять их для решения конкретных задач.
		ОПК-1.2	Умеет осуществлять первичный сбор и анализ материала, интерпретировать различные математические объекты	Знать: основные примеры ортонормированных систем. Уметь: использовать математический аппарат для решения теоретических и прикладных задач. Владеть: математическим аппаратом, аналитическими

				методами исследования
		ОПК-1.3	Применяет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе имеющихся теоретических знаний и опыта решения математических задач	Знать: безусловные базисы, базисы в различных пространствах. Уметь: использовать методы гармонического анализа для решения конкретных аналитических задач Владеть: навыками применения базисов в различных пространствах.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.(в соответствии с учебным планом) — 2/72.

Форма промежуточной аттестации (зачет/экзамен) зачет

13. Виды учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость			
	Всего	По семестрам		
		№ семестра	№ семестра	...
Аудиторные занятия	72	4		
в том числе: лекции				
практические	20	4		
лабораторные				
Самостоятельная работа	52	4		
Форма промежуточной аттестации (зачет – 3 час. / экзамен – 0 час.)		4		
Итого:	72			

13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
1. Лекции			
2. Практические занятия			
1	Пространства функций и последовательностей	Пространства L_p , l_p и C_0 . Виды сходимости, сепарабельность, подпространства	
2	Системы функций	Системы сходимости, полнота, тотальность, биортогональность, коэффициенты Фурье.	
3	Базисы.	Безусловные базисы, базисы в различных	

		пространствах, функция Пэли.	
4	Независимые системы функций	Свойства независимых систем, система Радемахера, неравенство Хинчина.	
5	Система Радемахера, ортогональность, ряды Радемахера в L_∞ .	Изучаются свойства функции Радемахера в пространствах L_p и L_∞ . Доказывается, что любое подпространство порожденное дизъюнктивной системой функций дополняемо в L_p .	
6	Неравенство Хинчина, $P > 2$.	Доказывается неравенство Хинчина в пространствах $L_p, P > 2$.	
7	Неравенство Хинчина, $P < 2$.	Доказывается неравенство Хинчина в пространствах $L_p, P < 2$.	
8	Дополняемость линейной оболочки системы Радемахера в L_p .	Доказывается, что подпространство порожденное системой Радемахера дополняемо в L_p с помощью ортогонального проектора.	
9	Неограниченность ортогонального проектора в L_1 .	Доказывается неограниченность ортогонального проектора в пространстве L_1 .	
10	Обобщение неравенства Хинчина на пространства Орлича.	Доказывается аналог неравенства Хинчина в пространствах Орлича.	
11	Диадические интервалы, определение системы Хаара, ортогональность.	Доказываются основные свойства системы Хаара.	
12	Ядро Дирихле системы Хаара.	Вычисляется ядро Дирихле системы Хаара.	
13	Сходимость частичных сумм в C .	Доказывается теорема о сходимости рядов Хаара в пространстве C .	
14	Модули непрерывности.	Доказываются основные свойства модулей непрерывности функций.	
15	Оценки скорости сходимости через модуль непрерывности.	Доказывается двухсторонняя оценка скорости сходимости рядов Хаара через модуль непрерывности функции.	

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Пространства функций и последовательностей. Системы функций. Базисы. Система Радемахера.		12		40	52
2	Ряды Хаара. Неравенство Хинчина.		8		12	20

Итого:	20	52	72
--------	----	----	----

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе освоения дисциплины студенты должны посетить практические занятия и сдать зачет.

Указания для освоения практического материала и сдачи зачета:

1. Обязательное посещение по дисциплине с конспектированием излагаемого преподавателем материала в соответствии с расписанием занятий.
2. Получение в библиотеке рекомендованной учебной литературы и электронное копирование рабочей программы с методическими рекомендациями.
3. Копирование (электронное) перечня вопросов к зачёту по дисциплине, а также списка рекомендованной литературы из рабочей программы дисциплины.
4. При подготовке к практическим занятиям по дисциплине необходимо изучить рекомендованный преподавателем материал, иметь при себе конспекты соответствующих тем и необходимый справочный материал.
5. Рекомендуется следовать советам преподавателя, связанным с освоением предлагаемого материала, провести самостоятельный Интернет - поиск информации (видеофайлов, файлов-презентаций, файлов с учебными пособиями) по ключевым словам курса и ознакомиться с найденной информацией при подготовке к зачёту по дисциплине.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Люстерник, Л. А. <i>Краткий курс функционального анализа [Текст] : .— Москва : Лань, 2009 .— 272 с</i>
2	Гуревич, Александр Петрович. <i>Сборник задач по функциональному анализу / А. П. Гуревич, В. В. Корнев, А. П. Хромов .— Москва : Лань, 2012 .— 192 с. : ил. — Допущено УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям 010101 — «Математика», 010901 — «Механика» и по направлению 010200 — «Математика. Прикладная математика.</i>

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3	Кашин, Борис Сергеевич. <i>Ортогональные ряды / Б.С. Кашин, А.А. Саакян .— М. : Наука : Физматлит, 1984 .— 495 с.</i>
4	Стейн, И. <i>Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / И. Стейн, Г. Вейс ; пер. с англ. В.В. Жаринова под ред. Е.Д. Соломенцева и С.Б. Стечкина .— М. : Мир, 1974 .— 333 с. — Библиогр.: с.320-327 .— Предм. указ.: с.328-329.</i>
5	Канторович, Леонид Витальевич. <i>Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акимов .— 2-е изд., перераб. — М. : Наука, 1977 .— 741 с.</i>
6	Серебренников, М.Г. <i>Гармонический анализ / М.Г. Серебренников .— М.-Л. : ОГИЗ Гостехиздат, 1948 .— 504 с. : ил.</i>

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
7	ЭБС «Лань» : http://e.lanbook.com
8	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. —

	(http // www.lib.vsu.ru/)
9	Google, Yandex, Rambler

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Основными направлениями управляемой самостоятельной работы в овладении знаниями учебной дисциплины «Современный гармонический анализ и его приложения» являются:

- первоначально подробное ознакомление с программой учебной дисциплины;
- ознакомление со списком рекомендуемой литературы по дисциплине в целом и ее разделам, наличие ее в библиотеке и других доступных источниках, изучение необходимой литературы по теме, подбор дополнительной литературы;
- изучение и расширение лекционного материала преподавателя за счет специальной литературы, консультаций;
- подготовка к зачету.

Тем самым, имеется в виду постепенное превращение обучения в самообучение, когда магистрант должен получать знания главным образом за счет креативной самостоятельной работы, самостоятельно осуществляя поиск необходимой информации и созидательно прорабатывая ее с тем, чтобы произвести необходимые умозаключения и получить результаты. В этом случае, выполняя учебные задачи, магистранты самостоятельно приобретают новые знания, навыки и умения (в частности, умение анализировать и принимать решения в нестандартных ситуациях), что очень важно для эффективной будущей профессиональной деятельности.

Самостоятельная работа для магистрантов важнейшая часть учебного процесса. Решение задач по подготовке квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, невозможно без наличия навыков самостоятельной работы магистрантов.

Цель самостоятельной работы магистрантов:

- углубление фундаментальных и профессиональных знаний, умений и навыков в соответствии с профилем деятельности;
- сознательно и самостоятельно осуществлять работу с учебным и научным материалом;
- совершенствование опыта исследовательской и созидательной деятельности;
- совершенствование навыков творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального формата;
- укрепление навыков самоорганизации и самовоспитания для получения навыков перманентного повышения профессионализма.

Для достижения целей самостоятельной работы магистрантов необходимо решение следующих задач:

- развитие творческого мышления;
- овладение основными методами исследовательской работы;
- приобретение магистрантами через самостоятельную деятельность собственного опыта и профессиональных навыков.
- углубление, расширение, систематизация и закрепление полученных знаний и умений;
- выработка навыка использования и анализа источниковой базы и специальной литературы;
- формирование исследовательских навыков и умений;
- овладение способностью использовать собранную в ходе самостоятельной работы информацию в учебных целях.

В течение семестра студенты на практических занятиях решают индивидуальные задания, соответствующего варианта. Результаты самостоятельных работ зачитываются во время зачета.

№ п/п	Источник
1.	Секефальви-Надь, Б. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве / Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш ; Пер. с фр. Ю.Л. Шмульяна; Под ред. Ю.П. Гинсбурга; С предисл. М.Г. Крейна .— М. : Мир, 1970 .— 431 с. : ил.

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

Осуществляется интерактивная связь с преподавателем через сеть интернет, проводятся индивидуальные онлайн консультации.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины: При изучении дисциплины используются активные и интерактивные формы проведения практических занятий; учебные аудитории для проведения практических занятий; осуществляется контроль посещаемости и выполнения всех видов самостоятельной работы. В течение семестра студенты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому занятию.

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Пространства функций и последовательностей. Системы функций. Базисы. Система Радемахера.	ОПК-1	ОПК-1.1; ОПК-1.2; ОПК-1.3	Промежуточная аттестация – зачет, Устный опрос
2.	Ряды Хаара. Неравенство Хинчина.	ОПК-1	ОПК-1.1; ОПК-1.2; ОПК-1.3	Промежуточная аттестация – зачет, Устный опрос
Промежуточная аттестация форма контроля - зачет				

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

К основным формам текущего контроля можно отнести устный опрос.

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины в форме зачета.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестра и может завершать изучение, как отдельной дисциплины, так и ее разделов. Промежуточная аттестация помогает оценить более крупные совокупности знаний и умений, в некоторых случаях даже формирование определенных компетенций.

На зачете оценивается практический уровень освоения дисциплины и степень сформированности компетенций оценками «зачет» и «не зачет».

Задания текущего контроля и проведение промежуточной аттестации должны быть направлены на оценивание уровня освоения теоретических и практических понятий, научных основ профессиональной деятельности; степени готовности обучающегося применять теоретические и практические знания и практически значимую информацию; приобретение умений профессионально значимых для профессиональной деятельности.

Примеры ответов:

1. Базисы.

- 1) О. с. векторов - множество $\{x_\alpha\}$ ненулевых векторов евклидова (гильбертова) пространства со скалярным произведением (\cdot, \cdot) такое, что $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ при $\alpha \neq \beta$ (ортогональность) и $(x_\alpha, x_\alpha) = 1$ (нормируемость).

М. И. Войцеховский.

2) О. с. ф у н к ц и и - система $\{\varphi_i(x)\}$ функций пространства $L^2(X, S, m)$, являющаяся одновременно ортогональной и нормированной в $L^2(X, S, m)$, то есть

$$\int_X \varphi_i(x) \overline{\varphi_j(x)} d\mu = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j \end{cases}$$

(см. *Нормированная система, Ортогональная система*). В математич. литературе часто термин "ортогональная система" означает

"ортонормированная система". При исследовании данной ортогональной системы ее нормированность не играет существенной роли. Тем не менее нормированность систем дает возможность более ясной формулировки нек-рых теорем о сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

в терминах поведения коэффициентов $\{c_k\}$. Такой теоремой является, напр., теорема Рисса - Фигаера: ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

по ортонормированной в $L^2[a, b]$ системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$

сходится в метрике пространства $L^2[a, b]$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$$

2. Модуль непрерывности

- одна из основных характеристик непрерывных функций. Н. м. непрерывной на отрезке функции $f(x)$ определяется как

$$\omega(\delta, f) = \max_{|h| < \delta} \max_x |f(x+h) - f(x)|.$$

Определение Н. м. введено А. Лебегом (A. Lebesgue) в 1910, хотя по существу понятие было известно и ранее. Если Н. м. функции $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\omega(\delta, f) \leq M\delta^\alpha,$$

где $0 < \alpha \leq 1$, то говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет *Липшица условию* порядка α . Для того чтобы неотрицательная функция $\omega(\delta)$ была Н. м. нек-рой непрерывной функции, необходимо и: достаточно, чтобы она обладала следующими свойствами: $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta)$ не убывает, $\omega(\delta)$ непрерывна, $\omega(\delta + \eta) \leq \omega(\delta) + \omega(\eta)$, $\delta, \eta > 0$. Рассматриваются также Н. м. высших порядков

$$\omega_k(\delta, f) = \max_{|h| < \delta} \max_x |\Delta_h^k f(x)|,$$

где

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} C_k^i f(x+ih)$$

- конечная разность k -го порядка функции $f(x)$, и Н. м. в произвольных пространствах функций, напр, интегральный Н. м. функции $f(x)$, интегрируемой на отрезке $[a, b]$ со степенью $p \geq 1$

$$\omega^{(p)}(\delta, f) = \sup_{0 < h \leq \delta} \left\{ \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right\}^{1/p}. (*)$$

Для 2π -периодической функции интеграл в выражении (*) берется по отрезку $[0, 2\pi]$.

20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущая аттестация проводится в форме выполнения индивидуальных заданий.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация включает в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний.

1. Независимые функции, система Радемахера.
2. Неравенство Хинчина 1
3. Неравенство Хинчина 2.
4. Дополняемость подпространства Радемахера в L_p .
5. Сходимость рядов Радемахера.
6. Диадические интервалы, система Хаара.
7. Ядро Дирихле системы Хаара.
8. Сходимость рядов Хаара в C .
9. Модуль непрерывности.

10. Независимые функции, система Радемахера.
11. Неравенство Хинчина 1
12. Неравенство Хинчина 2.
13. Дополняемость подпространства Радемахера в L_p .
14. Сходимость рядов Радемахера.
15. Диадические интервалы, система Хаара.
16. Ядро Дирихле системы Хаара.
17. Сходимость рядов Хаара в C .
18. Модуль непрерывности.

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

- 1) знание учебного материала и владение понятийным аппаратом;
- 2) умение связывать теорию с практикой;
- 3) умение иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований;
- 4) умение применять полученные знания на практике;
- 5) владение понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), способность иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач в области...	<i>Повышенный уровень</i>	<i>зачет</i>
Обучающийся владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), допускает незначительные ошибки при ответе.	<i>Базовый уровень</i>	<i>зачет</i>
Обучающийся владеет частично теоретическими основами дисциплины, фрагментарно способен дать ответ.	<i>Пороговый уровень</i>	<i>зачет</i>
Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки.	–	<i>Незачет</i>